BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUS

Lehrpläne für die Berufsoberschule

Unterrichtsfach: Mathematik (Nichttechnik)

Jahrgangsstufen 12 und 13

Die Lehrpläne wurden mit KMBek vom 5. August 2003 Nr. VII.7-5 S 9410W1-6-7.66823 in Kraft gesetzt.
Die Lehrpläne der Vorstufe treten zum Beginn des Schuljahres 2003/04 in Kraft, die Lehrpläne für die Jahrgangsstufen 12 zum Beginn des Schuljahres 2004/05, die Lehrpläne für die Jahrgangsstufen 13 zum Beginn des Schuljahres 2005/06. Sie ersetzen die bisher gültigen Lehrpläne.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

1 Vorbemerkung zum Aufbau und zur Verbindlichkeit der Lehrpläne

Die folgenden Lehrpläne beschreiben die Bildungs- und Erziehungsaufgaben der Berufsoberschule auf drei Ebenen.

Die erste Ebene umfasst das **Schulartprofil** und erläutert den Bildungsauftrag der Schulart allgemein. Die zweite Ebene ist die der **Fachprofile**. Das Fachprofil charakterisiert den Unterricht eines bestimmten Fachs im Ganzen, indem es übergeordnete Ziele beschreibt, didaktische Entscheidungen begründet und fachlich-organisatorische Hinweise (z. B. auf fachübergreifenden Unterricht) gibt. Die **Fachlehrpläne** bilden die dritte Ebene. Sie enthalten jeweils eine Übersicht über die Lerngebiete sowie eine nach Jahrgangsstufen geordnete Darstellung der Lernziele, Lerninhalte und Hinweise zum Unterricht.

Die **Lernziele** geben Auskunft über die Art der personalen Entwicklung, die bei den Schülerinnen und Schülern gefördert wird. Die Lernziele sind frei formuliert. Die jeweils gewählte Formulierung will deutlich machen, mit welchen der vier didaktischen Schwerpunkte – Wissen, Können und Anwenden, produktives Denken und Gestalten sowie Wertorientierung – die beschriebenen Entwicklungsprozesse in Verbindung stehen. Den Lernzielen sind **Lerninhalte** zugeordnet. Diese stellen die fachspezifischen Lerngegenstände des Unterrichts dar.

Die in den drei Lehrplanebenen aufgeführten Ziele und Inhalte bilden zusammen mit fächerübergreifenden Bildungs- und Erziehungsaufgaben[1], den einschlägigen Artikeln des Grundgesetzes für die Bundesrepublik Deutschland, der Verfassung des Freistaates Bayern und des Bayerischen Gesetzes über das Erziehungs- und Unterrichtswesen die verbindliche Grundlage für den Unterricht und die Erziehungsarbeit.

Die Fachlehrpläne stellen Lernziele und Lerninhalte systematisch dar. Ihre konkrete Abfolge im Unterricht ergibt sich aus dem jeweiligen Unterrichtsgegenstand, für den u. U. verschiedene Lernziele des Lehrplans kombiniert werden, aus der gewählten Unterrichtsmethode und der Absprache der Lehrkräfte.

Die **Hinweise zum Unterricht** sowie die Zeitrichtwerte dienen der Orientierung oder Abgrenzung und sind nicht verbindlich. Die Freiheit der Methodenwahl im Rahmen der durch die Lernziele ausgedrückten didaktischen Absichten ist dadurch nicht eingeschränkt. Die Lehrpläne sind grundsätzlich so angelegt, dass ein ausreichender pädagogischer Freiraum bleibt, damit spezifische Interessen der Schülerinnen und Schüler, aktuelle Themen sowie öffentliche bzw. regionale Gegebenheiten aufgegriffen werden können.

[1] Z. B. dargestellt in: Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung, Abt. Berufliche Schulen (Hrsg.), *Bildungs- und Erziehungsaufgaben an Berufsschulen und Berufsfachschulen*, München 1996

2 Schulartprofil

Die Berufsoberschule führt Schülerinnen und Schüler mit mittlerem Schulabschluss und Berufsausbildung oder einschlägiger Berufserfahrung in zwei Jahren zur fachgebundenen Hochschulreife, mit dem Nachweis ausreichender Kenntnisse in einer zweiten Fremdsprache (auf dem Niveau der 10. Klasse des Gymnasiums) zur allgemeinen Hochschulreife. Durch die erfolgreiche Teilnahme an der fakultativen Fachhochschulreifeprüfung können sie nach einem Jahr die Fachhochschulreife erwerben. Entsprechend ihrer beruflichen Qualifikation werden die Schülerinnen und Schüler vier Ausbildungsrichtungen zugeordnet: Technik, Wirtschaft, Sozialwesen, Agrarwirtschaft.

Zum Erwerb der Studierfähigkeit werden die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt, anspruchsvolle theoretische Erkenntnisse nachzuvollziehen, komplizierte Zusammenhänge zu durchschauen und verständlich darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler erwerben hohe kommunikative Kompetenz in der deutschen Sprache, entwickeln ein hohes Sprach- und Literaturverständnis und beherrschen eine Fremdsprache auf anspruchsvollem Niveau. Sie besitzen geschichtliches Bewusstsein und soziale Reife und gehen sicher mit komplexen mathematischen und naturwissenschaftlichen Problemen um. Komplexe moderne Informations- und Kommunikationsmittel nutzen sie kompetent und verantwortungsvoll. Die Schüler und Schülerinnen sind in der Lage, sich mit tiefer gehenden Problemstellungen der jeweiligen Fächer auseinander zu setzen.

Der Unterricht greift die im Berufsleben erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Erfahrungen der jungen Erwachsenen auf und erweitert sie – bestehende Unterschiede ausgleichend – gemäß den Bildungszielen der Schulart. Die Lehrkräfte geben den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit, im fächerübergreifenden und projektorientierten Arbeiten die bereits erworbenen Arbeitstugenden zu entfalten. Die Schülerinnen und Schüler werden zum selbstständigen Wissenserwerb und zum eigenständigen Urteilen angeleitet. Dies verlangt eigenverantwortliches Lösen komplexer Aufgaben und fördert dadurch Flexibilität und Kreativität. Die Schülerinnen und Schüler bauen ihre fachlichen Kompetenzen aus, entwickeln ein umfassendes Problembewusstsein sowie Einstellungen und Haltungen, die auf verantwortliches Handeln in der Gemeinschaft ausgerichtet sind.

Die Verwirklichung der Bildungsziele setzt bei den Schülerinnen und Schülern grundlegende Kenntnisse in den Fächern der jeweiligen Ausbildungsrichtung voraus. Für einen erfolgreichen Schulabschluss sind eine hohe Bereitschaft, sich auf geistige und ethische Herausforderungen einzulassen, eine hohe Lernmotivation, große Ausdauer, geistige Beweglichkeit und die Fähigkeit, selbstständig und mit anderen zu arbeiten, notwendig.

3 Stundentafel

Den Lehrplänen liegt die Stundentafel der Schulordnung für die Berufsoberschulen in Bayern (BOSO) in der jeweils gültigen Fassung zugrunde.

4 Übersicht über die Lerngebiete

Die Zahlen in Klammern geben Zeitrichtwerte an, d. h. die für das betreffende Lerngebiet empfohlene Zahl von Unterrichtsstunden.

Jahrgangsstufe 12

Analysis	
12.1 Grundbegriffe bei reellen Funktionen	(37)
12.2 Grenzwert und Stetigkeit	(10)
12.3 Differenzialrechnung	(40)
12.4 Integralrechnung	(12)
Stochastik	
12.5 Zufallsexperiment und Ereignis	(15)
12.6 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	(14)
12.7 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	(12)
12.8 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung	(16)
12.9 Testen von Hypothesen	(9)
	165

Jahrgangsstufe 13

Analysis

13.1	Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen	(12)
13.2	Ableitungsregeln	(8)
13.3	Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen	(15)
13.4	Kurvendiskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen	(15)
13.5	Kurvendiskussion zusammengesetzter Exponential- und Logarithmusfunktionen	(36)

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

13.6	Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	(12)
13.7	Matrizen	(9)
13.8	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$; lineare Gleichungssysteme	(23)
13.9	Leontief-Modell	(12)
13.10	Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$	(23)
		165

LEHRPLÄNE

MATHEMATIK

Fachprofil: Die Mathematik hat ihren Ursprung im Interesse der Menschen, Dinge der Erfahrungswelt und ihre gegenseitigen Beziehungen quantitativ zu erfassen. Zählen, Messen, Simulieren, Rechnen und Berechnen, Zeichnen und Konstruieren sind für planendes Handeln von großer Bedeutung. Damit verbunden ist der Drang nach zweckfreier Erkenntnis, der wesentlich die Entwicklung der Mathematik bestimmt: Probleme der Praxis geben ebenso wie theoretische Fragen Anlass zur Erforschung grundlegender Zusammenhänge; aus der Wechselwirkung mit den Erfahrungswissenschaften ergeben sich für beide Bereiche vertiefte Einsichten. Die Mathematik ist heute ein weit verzweigtes Gebiet, das umfangreiches Wissen und vielfältige Verfahren bereitstellt. Damit trägt sie zur wissenschaftlichen Erschließung unserer Wirklichkeit und zur Gestaltung unserer Umwelt entscheidend bei.
Ziel des Mathematikunterrichts ist es, den Schülerinnen und Schülern die Welt der Mathematik näher zu bringen und ihnen die nötigen Kenntnisse und Arbeitsweisen zu vermitteln, um Zusammenhänge mathematisch erschließen zu können. Der Unterricht macht mit einigen grundlegenden Ideen und Formen mathematischer Betrachtung und Tätigkeit vertraut. Die Schülerinnen und Schüler erfahren dabei eine intensive Schulung des Denkens: Die Entwicklung klarer Begriffe und Vorstellungen, eine folgerichtige Gedankenführung und systematisches induktives oder deduktives Vorgehen sind typische Erfordernisse und Kennzeichen mathematischen Arbeitens. Entsprechende Fähigkeiten auszubilden ist eine durchgängige Aufgabe im Mathematikunterricht und bringt Gewinn über das mathematische Fachgebiet hinaus.
Ein weiteres Unterrichtsziel ist der sorgfältige Gebrauch der Sprache: Eindeutigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit bei der Verbalisierung mathematischer Sachverhalte sind für deren gedankliche Durchdringung unerlässlich.
Zunehmend von Bedeutung ist die Mathematik für viele Anwendungsgebiete. Neben Naturwissenschaft und Technik verwenden auch die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften vermehrt mathematische Methoden. An geeigneten Aufgaben und Projekten aus diesen Bereichen – mit Schwerpunkt auf den ausbildungsrichtungsspezifischen Profilfächern – lernen die Schülerinnen und Schüler, Sachzusammenhänge mathematisch zu erfassen, entsprechende Modellvorstellungen zu entwickeln und ggf. mit geeigneten informationstechnischen Werkzeugen zu behandeln. Damit will der Mathematikunterricht in der beruflichen Oberstufe den Schülerinnen und Schülern in ausreichendem Maß die für Studium und Beruf notwendigen Voraussetzungen vermitteln. Der grundbildende Aspekt der Mathematik steht dabei im Vordergrund.

Jahrgangsstufe 12

Lerngebiete:			
	Analysis		
	12.1	Grundbegriffe bei reellen Funktionen	37 Std.
	12.2	Grenzwert und Stetigkeit	10 Std.
	12.3	Differenzialrechnung	40 Std.
	12.4	Integralrechnung	12 Std.
	Stochastik		
	12.5	Zufallsexperiment und Ereignis	15 Std.
	12.6	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	14 Std.
	12.7	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	12 Std.
	12.8	Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung	16 Std.
	12.9	Testen von Hypothesen	9 Std.
			165 Std.

LERNZIELE	LERNINHALTE	HINWEISE ZUM UNTERRICHT

Analysis

12.1 Grundbegriffe bei reellen Funktionen 37 Std.

12.1.1 Grundlagen

Die grundlegenden Begriffe zum Themengebiet sollen von den Schülerinnen und Schülern teils wiederholt, teils neu erarbeitet werden. Dabei sollen sie die	Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und ihre Eigenschaften	Auf die unterschiedliche Verwendung des Symbols $\mathbb{N}$ soll hingewiesen werden. Unterscheidung zwischen exakter und näherungsweiser Angabe einer reellen Zahl

zugehörigen Termumformungen durchführen können. Von Anfang an sollen sie zudem auf die korrekte Verwendung der Fachterminologie achten. Schülerinnen und Schüler mit geringen Vorkenntnissen erhalten Anregungen, wie sie ihre Defizite durch selbstständige häusliche Arbeit beheben können. Eine ausführliche Wiederholung algebraischer Grundlagen aus der Mittelstufe ist hier nicht möglich.	Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph	
	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	Anwendungsbeispiele siehe auch 12.1.3
	Lineare Funktionen, quadratische Funktionen auch mit Parameter	
	Lineare und quadratische Ungleichungen	Lösung z. B. mit Hilfe von Funktionsgraphen oder mit Vorzeichentabellen
	Potenzfunktionen mit Exponenten $n \in \{3, 4, -1\}$	

12.1.2 Ganzrationale Funktionen

Anhand der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) werden weitere grundlegende Begriffe zu Funktionen wiederholt bzw. neu erarbeitet. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler auch die zugehörigen Termumformungen sicher beherrschen lernen.	Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz und Produkt	
	Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution	Auch Schnittprobleme behandeln
	Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen	Hier sollen auch Aufgaben mit Parameter bearbeitet werden.
	Symmetrie des Funktionsgraphen Auswirkungen auf den Funktionsgraphen	Nur Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung behandeln Computereinsatz zur Veranschaulichung

12.1.3 Mathematische Modellbildung

Die Schülerinnen und Schüler lernen mathematische Modelle zur Beschreibung realer Zusammenhänge kennen. Dabei werden auch die Grenzen solcher Modelle diskutiert.	Anwendungsbeispiele mit ganzrationalen Funktionen	Z. B. Stromtariffunktion, Kostenfunktion, Erlösfunktion Aufstellen einer ganzrationalen Funktion aus Wertepaaren im Sachzusammenhang
	Abschnittsweise definierte Funktionen	Z. B. Einkommensteuerfunktion, Telefongebührenfunktion

12.2 Grenzwert und Stetigkeit 10 Std.

12.2.1 Grenzwert

Der für die Analysis fundamentale Begriff des Grenzwerts wird erarbeitet und an verschiedenartigen Beispielen verdeutlicht. Anhand gebrochen-rationaler Funktionen werden Konvergenz und Divergenz veranschaulicht und der Differenzialquotient vorbereitet. Die Anwendung der Grenzwertsätze erleichtert die rechnerischen Untersuchungen und vermittelt Sicherheit in der Bestimmung von Grenzwerten.	Quotient von Funktionen Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$ bzw. $x \to x_0$ Grenzwertsätze für Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Funktionen	Zähler- und Nennerpolynom sollen höchstens Grad 2 besitzen. Die Grenzwertberechnungen dienen der Vorbereitung des Differenzialquotienten. Es genügt, die Grenzwertsätze plausibel zu machen. Die grafische Darstellung gebrochen-rationaler Funktionen dient zur Veranschaulichung, sollte aber nicht geprüft werden. Die Begriffe Unendlichkeitsstelle, behebbare Definitionslücke und Asymptote werden nur anschaulich verwendet.

12.2.2 Stetigkeit

Die Schülerinnen und Schüler erfassen den Begriff Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle sowie in einem Intervall und können Stetigkeitsuntersuchungen an einfachen Beispielen durchführen. Sie lernen Eigenschaften von Funktionen kennen, die auf abgeschlossenen Intervallen stetig sind.	Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle Stetigkeit in einem Intervall Zwischenwertsatz Nullstellensatz Extremwertsatz	Der Begriff der Stetigkeit soll anschaulich verdeutlicht werden, Beispiele für unstetige Funktionen ergeben sich aus Lernziel 12.1.3. Auf Stetigkeitsuntersuchungen mit Parameter wird verzichtet. Die Sätze werden anschaulich vermittelt. Eine nummerische Methode zur Nullstellenermittlung sollte exemplarisch durchgeführt werden. Hierbei eignet sich der Einsatz von Computerprogrammen.

12.3 Differenzialrechnung 40 Std.

12.3.1 Anhand einfacher Funktionen er-	Differenzenquotient	

	fahren die Schülerinnen und Schüler die Grundbegriffe der Differenzialrechnung. Sie erlernen das Aufstellen der Gleichung einer Tangente im Punkt eines Graphen und lernen den Begriff der Ableitungsfunktion kennen. Neben der geometrischen Betrachtung (Sekante, Tangente) erkennen sie die Ableitung als lokale Änderungsrate einer Größe.	Differenzialquotient Differenzierbarkeit Ableitung einer Funktion an einer Stelle und Bestimmung der Ableitungsfunktionen für $f(x) = c$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$ unter Verwendung des Differenzenquotienten	Es sollen keine abschnittsweise definierten Funktionen mit dem Differenzenquotienten untersucht werden.
		Tangente	
		Unterschiedliche Schreibweisen: $\dot{f}(t)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $f'(x)$	
		Änderungsrate einer Größe	Die Bedeutung der Ableitung als lokale Änderungsrate einer Größe lässt sich durch folgende Beispiele verdeutlichen: Momentangeschwindigkeit, Momentanbeschleunigung, Entwicklung von Aktienkursen, Populationen u. Ä.
		Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion	Durch Darstellung der Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion mit Hilfe des Computers kann die Änderung einzelner Parameter und deren Auswirkung anschaulich behandelt werden.
12.3.2	Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass die Ableitungsregeln die Berechnung von Ableitungen erleichtern.	Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor Summenregel Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ Ableitung der Polynomfunktionen	Auf Produkt- und Kettenregel wird verzichtet.
12.3.3	Die Schülerinnen und Schüler erkennen den Zusammenhang zwi-	Stetigkeit als notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit	Die Existenz von $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ ist hinreichend für die Dif-

schen Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion.	Ableitung von abschnittsweise definierten Funktionen ohne Parameter	ferenzierbarkeit einer stetigen Funktion an der Stelle x_0.
12.3.4 Zunächst vergleichen die Schülerinnen und Schüler die Funktionseigenschaften „streng monoton zunehmend (abnehmend) in einem Intervall“ und „positive (negative) Ableitung in einem Intervall“ miteinander und grenzen diese gegeneinander ab.	Monotoniedefinition Monotoniekriterium Bestimmung der maximalen Intervalle in der Definitionsmenge, in denen ein Graph streng monoton steigt bzw. fällt	Beispiele für Probleme bei Monotonieuntersuchungen: Die Funktion $f: x \mapsto x^3$ ist in $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend, obwohl $f'(0) = 0$ gilt. Anwendungen: z. B. Anstieg der Lebenshaltungskosten
12.3.5 Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass zwischen den Funktionen f' und f'' ein analoger Zusammenhang besteht wie zwischen den Funktionen f und f', und erkennen die Bedeutung des Vorzeichens von $f''(x)$ für den Verlauf des Graphen von f.	Links- und Rechtskrümmung Maximale Intervalle in der Definitionsmenge, in denen der Graph links- bzw. rechtsgekrümmt ist	Interpretation der positiven bzw. negativen zweiten Ableitung als Zunahme bzw. Abnahme der Steigung eines Funktionsgraphen Anwendungen: z. B. Verminderung des Anstiegs der Lebenshaltungskosten
12.3.6 Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten Kriterien für die Extrempunkte eines Graphen und deren Art sowie Kriterien für Wendepunkte und Terrassenpunkte.	Definition des Begriffes „Extrempunkt“ ohne Voraussetzung der Differenzierbarkeit Hinreichendes Kriterium für Extrempunkte bei einmal bzw. mindestens zweimal differenzierbaren Funktionen Wendestellen als eigentliche Extremstellen von f' Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte bei zweimal bzw. mindestens dreimal differenzierbaren Funktionen	

	Randextrema, absolute Extrema	
12.3.7 Die Schülerinnen und Schüler gewinnen Sicherheit in der Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen und in der Anwendung der Differenzialrechnung. Die Grundlagen der mathematischen Modellbildung aus Lernziel 12.1.3 werden hier mit Hilfe der Differenzialrechnung erweitert.	Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen und einparametrigen Funktionenscharen Aufstellen des Funktionsterms bei vorgegebenen Eigenschaften Anwendungsaufgaben, auch Optimierungsprobleme	Der Einfluss eines Scharparameters auf den Verlauf des Graphen kann mit Computerprogrammen veranschaulicht werden. Beschränkung auf höchstens vier Bedingungen Auf das Aufstellen von Funktionenscharen wird verzichtet.

12.4 Integralrechnung 12 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, Stammfunktionen von Funktionen zu finden, und berechnen damit bestimmte Integrale.	Stammfunktionen einer Funktion Unbestimmtes Integral Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz Berechnung von bestimmten Integralen und Flächeninhalten ohne Parameter	Der Zusammenhang zwischen Differenzial- und Integral rechnung kann über die Ableitung der Flächenfunktion plausibel gemacht werden.

Stochastik

12.5 Zufallsexperiment und Ereignis 15 Std.

Der Ergebnisraum wird von den Schülerinnen und Schülern als Möglichkeit erfahren, reale Situationen als Zufallsexperimente mathematisch zu beschreiben. Venn-Diagramme helfen bei der Darstel-	Ergebnisraum Ω als Menge aller Ergebnisse ω_i eines Zufallsexperiments Ergebnisraum eines mehrstufigen Zufallsexperiments Baumdiagramm	Beschränkung auf endliche Ergebnisräume Vergröberung und Verfeinerung von Ω Zufallsexperimente können auf das Urnenmodell zurückgeführt werden.

lung. Problemstellungen, die in der Umgangssprache formuliert sind, können von den Schülerinnen und Schülern selbstständig in die Ereignissprache und in die formale Sprache der Mengenlehre übertragen werden.	Ereignis als Teilmenge des Ergebnisraums Venn-Diagramme Elementarereignis Sicheres und unmögliches Ereignis Gegenereignis Verknüpfung von Ereignissen Gesetze von de Morgan Unvereinbarkeit von Ereignissen	Verknüpfung und Unvereinbarkeit auf zwei Ereignisse beschränken

12.6 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit — 14 Std.

Mit Hilfe des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kommt man vom Begriff der relativen Häufigkeit zu dem der Wahrscheinlichkeit. Die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden aus denjenigen der relativen Häufigkeit abgeleitet. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit der Vierfeldertafel und erkennen die Bedeutung des Begriffs „stochastische Unabhängigkeit".	Relative Häufigkeit eines Ereignisses und deren Eigenschaften	
	Empirisches Gesetz der großen Zahlen	Computereinsatz Auf den Begriff „Bedingte Wahrscheinlichkeit" kann verzichtet werden.
	Laplace-Experiment Laplace-Wahrscheinlichkeit	Die historischen Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung können hier angesprochen werden.
	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten Wahrscheinlichkeitsverteilung Satz von Sylvester für zwei Ereignisse	Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
	Vierfeldertafel Stochastische (Un-)Abhängigkeit zweier Ereignisse	Anwendungsbezogene Aufgaben Eigene Untersuchungen durchführen lassen Grenzen der Aussagekraft diskutieren

12.7 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten — 12 Std.

Ausgehend vom Baumdiagramm erhalten die Schülerinnen und Schüler Informationen sowohl über die Mächtigkeit von Ereignissen als auch (mit Hilfe der Pfadre-	Baumdiagramm bei mehrstufigen Zufallsexperimenten Pfadregeln Urnenmodell	

geln) über Wahrscheinlichkeiten. Als Modell für viele reale Vorgänge lernen sie die Bernoulli-Kette kennen.	Allgemeines Zählprinzip	Nur Aufgaben, die mit Baumdiagramm oder allgemeinem Zählprinzip zu lösen sind
	n! und Binomialkoeffizient	Die Kombinatorik wird nur noch benötigt, um die Formel für den Binomialkoeffizienten herzuleiten. Auf weitere kombinatorische Formeln und auf das Produkt von Binomialkoeffizienten wird verzichtet.
	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten Verwendung eines Tafelwerks	Aufgaben mit und ohne Verwendung des Tafelwerks Verzicht auf die Berechnung der Kettenlänge

12.8 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung — 16 Std.

Die Schülerinnen und Schüler übertragen den Funktionsbegriff auf die Stochastik. Sie lernen, Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung als Funktionen darzustellen und auszuwerten. Beim Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen erkennen sie die Notwendigkeit für die Einführung der Maßzahlen Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Sie können Spielangebote vergleichen und beurteilen. Das Tafelwerk lernen sie als weiteres Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben kennen.	Zufallsgröße Zufallswert	Auf den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion kann verzichtet werden.
	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße – in Tabellenform – in grafischer Darstellung, Histogramm u. a.	Im Rahmen von anwendungsbezogenen Aufgaben können hier auch Häufigkeitsverteilungen und Begriffe wie Klassenbildung, Median, Quartil etc. behandelt werden.
	Erwartungswert Varianz und Standardabweichung Verschiebungsformel	„faires“ Spiel
	Binomialverteilte Zufallsgröße und ihre charakteristische Maßzahlen Kumulative Verteilungsfunktion der Binomialverteilung	Computereinsatz zum Erstellen und Veranschaulichen von Binomialverteilungen Kumulative Verteilungsfunktionen nur bei binomialverteilten Zufallsgrößen; keine grafische Darstellung

12.9 Testen von Hypothesen — 9 Std.

An Beispielen erkennen die Schülerinnen	Ziel eines Hypothesentests	Der Begriff der repräsentativen Stichprobe sollte exem-

und Schüler die Bedeutung von Testverfahren. Sie lernen, mit den Begriffen sicher umzugehen, und können Risiken abschätzen und Irrtumswahrscheinlichkeiten berechnen. Sie erkennen, dass der Ausgang eines Tests von der Entscheidungsregel abhängt.	Stichprobe Testgröße Nullhypothese und Gegenhypothese Entscheidungsregel Ablehnungsbereich der Nullhypothese Fehler 1. und 2. Art Signifikanzniveau Einseitiger Signifikanztest bei zugrunde liegender Binomialverteilung	plarisch erläutert werden. Der Nichtablehnungsbereich wird auch als Annahmebereich bezeichnet. Auf den Unterschied zwischen Signifikanzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit hinweisen Praxisnahe Anwendungen Keine zweiseitigen Tests Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kann nicht berechnet werden.

LEHRPLÄNE

MATHEMATIK

Jahrgangsstufe 13

Lerngebiete:

Analysis			
13.1	Eigenschaften gebrochen-rationaler Funktionen	12 Std.
13.2	Ableitungsregeln	8 Std.
13.3	Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen	15 Std.
13.4	Kurvendiskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen	15 Std.
13.5	Kurvendiskussion zusammengesetzter Exponential- und Logarithmusfunktionen	36 Std.
Lineare Algebra und Analytische Geometrie		
13.6	Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$	12 Std.
13.7	Matrizen	9 Std.
13.8	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$; lineare Gleichungssysteme	23 Std.
13.9	Leontief-Modell	12 Std.
13.10	Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$	23 Std.
		165 Std.

LERNZIELE LERNINHALTE HINWEISE ZUM UNTERRICHT

Analysis

13.1 Eigenschaften gebrochen-rationaler 12 Std.

Funktionen

Die Schülerinnen und Schüler lernen die gebrochen-rationalen Funktionen kennen und üben sich darin, Eigenschaften solcher Funktionen zu bestimmen.	Echt und unecht gebrochen-rationale Funktionen	Eigenschaften der Potenzfunktionen $f\colon x \mapsto x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ansprechen Lösen von Bruchgleichungen und Bruchungleichungen
	Verhalten der Funktionswerte in der Umgebung einer Definitionslücke und für $x \to \pm\infty$	
	Unendlichkeitsstelle und stetig behebbare Definitionslücke, stetige Fortsetzung	Unendlichkeitsstellen mit und ohne Vorzeichenwechsel unterscheiden
	Polynomdivision mit Rest Senkrechte, waagrechte und schiefe Asymptoten	Auf Schnittpunkte mit Asymptoten eingehen

13.2 Ableitungsregeln — 8 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Begriff der Verkettung kennen, erarbeiten sich die Ableitungsregeln und wenden diese zur Ableitung von rationalen Funktionen an.	Produktregel Quotientenregel Verkettung von Funktionen und Kettenregel Ableitung von rationalen Funktionen	Beispiele für Verkettung: $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ bzw. $f(x) = (3x+2)^4$

13.3 Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen — 15 Std.

Die Schülerinnen und Schüler gewinnen Sicherheit in der Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen. Sie üben sich in der Berechnung einfacher Integrale.	Kurvendiskussion von gebrochen-rationalen Funktionen	Auf die Diskussion von Funktionenscharen wird verzich tet.
	Integrale der Form $\int (ax+b)^m \, dx$ mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ Uneigentliche Integrale 1. Art	Erweiterung des Begriffs Flächeninhalt

13.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen		15 Std.
13.4.1 Die Schülerinnen und Schüler lernen die Exponential- und Logarithmusfunktionen kennen. Zum Lösen entsprechender Gleichungen werden die Potenz- und Logarithmusgesetze angewendet. Anhand charakteristischer Anwendungsbeispiele entwickeln sie ein Bewusstsein für die Bedeutung dieser Funktionen.	Exponentialfunktionen mit Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ Eigenschaften der Funktionsgraphen Exponentielles Wachstum und exponentielle Abnahme	Als Anwendungsbeispiele eignen sich: Kapitalmehrung, radioaktiver Zerfall, Bevölkerungswachstum, Bierschaumzerfall etc.
	Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen Logarithmusgesetze, Basisumrechnung Eigenschaften der Funktionsgraphen	Hier sollen auch Beispiele zum dekadischen Logarithmu betrachtet werden (pH-Wert, Lautstärkeskala etc.). Verwendung auch von logarithmischen Skalen
13.4.2 Die Schülerinnen und Schüler lernen die Exponentialfunktion mit Basis e sowie die natürliche Logarithmusfunktion und deren Ableitungen kennen. Sie erwerben die Fähigkeit, Integrale zu berechnen, die mit der Exponentialfunktion oder der Logarithmusfunktion in Zusammenhang stehen.	Exponentialfunktion mit Basis e Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion Logarithmusfunktion mit Basis e	Darstellung von e als Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$
	Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion Bestimmung von $\int e^{ax+b}dx$ durch Umkehrung der Kettenregel	Die Methode, die Ableitung einer Funktion durch die Ableitung ihrer Umkehrfunktion zu gewinnen, sollte exemplarisch vorgestellt werden.
	Berechnung von Integralen unter Verwendung von $\int \frac{1}{ax+b}dx$	Beispiele auch der Form: $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^2}\,dx$ und $\int \frac{ax^2+bx+c}{mx+t}\,dx$
13.5 Kurvendiskussion zusammengesetzter Exponential- und Logarithmusfunktionen		36 Std.

13.5.1 Die Schülerinnen und Schüler erfahren, dass die Regeln von de L'Hospital geeignet sind, das Berechnen von Grenzwerten zu erleichtern.	Regeln von de L'Hospital	Es genügt, die Regeln plausibel zu machen und sich auf die Fälle „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“ und „$0 \cdot \infty$“ zu beschränken.
13.5.2 Die Schülerinnen und Schüler lernen, ihr erworbenes Wissen zur Kurvendiskussion auf Funktionen anzuwenden, die Exponential- und Logarithmusfunktionen enthalten. Sie erkennen, dass sich eine breite Palette von Anwendungen – exakt oder näherungsweise – mit Hilfe dieser Funktionen beschreiben lässt und die Differenzial- und Integralrechnung wichtige Hilfsmittel zur Untersuchung bereitstellt. Sie versuchen selbst Funktionen zu ermitteln, die Sachzusammenhänge näherungsweise beschreiben.	Kurvendiskussion von Funktionen, die als Produkt, Quotient, Summe oder Verkettung von Exponential-, Logarithmus- und Polynomfunktionen sowie gebrochen-rationalen Funktionen entstehen Flächenberechnungen	Beschränkung auf einfache Funktionstypen
	Anwendungsaufgaben und Modellbildung	Die mathematischen Begriffe (Steigung, Krümmung, Extremum, Wendepunkt, Grenzwert etc.) sollten nochmals in verschiedenen Sachzusammenhängen illustriert werden. Das Aufstellen von Näherungsfunktionen kann besonders bei größeren Datenmengen mit Computerunterstützung erfolgen.

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

13.6 Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ 12 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen mit Hilfe der Deutung eines Vektors als Translation die Darstellung von Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem	Geometrischer Vektor als Menge aller parallelgleichen Pfeile Repräsentant eines Vektors Nullvektor, Gegenvektor	Vektorielle Größen aus der Physik dienen zur Verdeutlichung

der Ebene oder des Raumes kennen. Durch die Verkettung von Translationen wird die Vektoraddition und die S-Multiplikation einsichtig. Die Schülerinnen und Schüler lernen, mit Hilfe der Addition und S-Multiplikation in Koordinatenschreibweise mit Vektoren zu rechnen.	Addition von Vektoren und S-Multiplikation und deren Rechengesetze	Auf die axiomatische Behandlung des Vektorraums wird verzichtet.
	Punkte und Ortsvektoren, Koordinatensysteme, Koordinaten	Unterscheidung zwischen Punkten und Vektoren
	Addition und S-Multiplikation in Koordinatenschreibweise	

13.7 Matrizen 9 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen mit Hilfe von Matrizen und deren Verknüpfungen eine Möglichkeit kennen, Größen und Beziehungen einfach darzustellen.	Matrix als Zahlenschema	Stückliste Übergangsmatrix Verflechtungstabelle
	Addition von Matrizen Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl	
	Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor	
	Rechengesetze, Einheitsmatrix	

13.8 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$; lineare Gleichungssysteme 23 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, dass die Verbindung von Addition und S-Multiplikation zur Linearkombination von Vektoren führt. Der Versuch, einen Vektor als Linearkombination von Vektoren zu schreiben, führt sie zu einem linearen Gleichungssystem. Die Schülerinnen und	Linearkombination von Vektoren Produkt aus einer Matrix und einem Vektor Gauß-Algorithmus	Deutung der Gleichungen des Systems als Koordinatengleichungen einer Vektorgleichung
	Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren Basis und Dimension eines reellen Vektor-	Über- und unterbestimmtes System Kollineare, komplanare Vektoren Hier keine Berechnung von Teilverhältnissen

Schüler lösen das lineare Gleichungssystem und lernen das Gauß-Eliminationsverfahren als leistungsfähige Lösungsmethode kennen. Die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors als Linearkombination führt sie dann zur Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren und zu den Begriffen der Basis und Dimension eines Vektorraums.	raums Koordinaten eines Vektors bezüglich einer beliebigen Basis Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen mit höchstens vier Unbekannten	Lineare Gleichungssysteme werden auch zum Aufstellen von Funktionsgleichungen in der Analysis verwendet.

13.9 Leontief-Modell 12 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, die Beschreibung von wirtschaftlichen Zusammenhängen durch Matrizen in der Input-Output-Analyse kennen und lösen entsprechende Anwendungsaufgaben auch mit dem Gauß-Algorithmus	Input-Output-Analyse, Leontief-Modell Produktionsvektor $\vec{x}$, Konsumvektor $\vec{y}$, Inputmatrix A $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$	Volkswirtschaftliche und betriebswirtschaftliche Anwendungen Anstelle des Begriffs Konsumvektor sind auch die Begriffe Marktvektor oder Nachfragevektor gebräuchlich.

13.10 Geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$ 23 Std.

Die Schülerinnen und Schüler lernen, Punkte, Geraden und Ebenen darzustellen sowie Aussagen über die gegenseitige Lage und die Schnittmenge zu machen. Lineare Gleichungssysteme lassen sich nun geometrisch interpretieren und deren Lösung lässt sich deuten. Sie lernen, sich die gegenseitige räumliche Lage der geometrischen Objekte vorzustellen und in Skizzen darzustellen.	Punktraum Geradengleichung Parameterform, Koordinatenform und Achsenabschnittsform der Ebenengleichung Besondere Lagen von Geraden und Ebenen im Koordinatensystem Gegenseitige Lage von Punkten, Geraden und Ebenen Schnittmengen	Die Koordinatenform der Ebenengleichung kann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gewonnen werden. Schnitt mehrerer Ebenen

ANLAGE

Mitglieder der Lehrplankommission:

Claus Katzer	München
Dieter Pratsch	Augsburg
Michael Storath	Kempten
Werner Maul	ISB, München
Jakob Maurer	ISB, München